Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 14.02.2013.

Pismeni ispit iz predmeta **Linearna algebra**

Bitna napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Dat je vektorski prostor $\mathbb{R}^+$ (svih pozitivnih realnih brojeva) nad poljem $\mathbb{R}$, na kome su operacije sabiranja vektora i množenje vektora skalarom definisane na sljedeći način

$$\text{vektorsko sabiranje: } \forall u, v \in \mathbb{R}^+ \quad u + v = uv;$$

$$\text{množenje skalarom: } \forall u \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha u = u^\alpha.$$

Odrediti bazu i dimenziju ovog vektorskog prostora. Odgovor obrazložiti.

2. Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao $\pi/3$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y = x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B} = \{(1,1)^\top, (1,-1)^\top\}$. Odredite koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

3. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$ dat je podprostor

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{x^2 - 1, x + 1\}.$$

Odredite jednu bazu za $\mathcal{M}^\perp$, te nađite prikaz polinoma $p(x) = 2x^2 + x + 5$ u obliku sume $p = p_1 + p_2$, pri čemu je $p_1 \in \mathcal{M}$, $p_2 \in \mathcal{M}^\perp$.

4. Zadana je linearna transformacija $T : \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'))$ u odnosu na par $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, te mu odredite po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).

Dat je vektorski prostor $\mathbb{R}^+$ (svih pozitivnih realnih brojeva) nad poljem $\mathbb{R}$, na kome su operacije sabiranja vektora i množenje vektora skalarom definisane na sljedeći način

$$+: \ \forall u, v \in \mathbb{R}^+ \quad u+v = u \cdot v;$$

$$\cdot: \ \forall u \in \mathbb{R}^+, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot u = u^\alpha .$$

Odrediti bazu i dimenziju ovog vektorskog prostora. Odgovor obrazložiti.

Rj. Uzmimo proizvoljan realan broj (vektor iz $\mathbb{R}^+$) npr. $1 \in \mathbb{R}^+$. Šta je span$\{1\}$?

$$\text{span}\{1\} = \{\alpha \cdot 1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{1^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{1\}$$

Šta je span$\{1,2\}$?

$$\text{span}\{1,2\} = \{\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{1^\alpha + 2^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{1^\alpha \cdot 2^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{2^\beta \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

Ova dva primjera nam nameću da je jedna baza vektorskog prostora $\{2\}$. Zašto? (a da je 1 neutralni element)

$$\text{span}\{2\} = \{\alpha \cdot 2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{2^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Da li je span$\{2\} = \mathbb{R}^+$?

Uzmimo proizvoljan element $b \in \mathbb{R}^+$. Da li tada postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ t.d. $2^\alpha = b$?

Ako za α uzmemo $\log_2 b$ tada $2^{\log_2 b} = b$.

Prema tome skup $\{2\}$ generiše $\mathbb{R}^+$ u odnosu na dvije date operacije.
(1 je neutralni element)
Kako $\alpha \cdot 2 = 1 \Rightarrow 2^\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$ to je $\{2\}$ linearno nezavisan skup.
Prema tome dimenzija ovog vektorskog prostora je 1, a jedna moguća baza je $\{2\}$.

Za vježbu pokazati da je npr. skup $\{2,3\}$ linearno zavisan u ovom prostoru.

$$\alpha \cdot 2 + \beta \cdot 3 = 1$$

$$2^\alpha + 3^\beta = 1$$

$$2^\alpha \cdot 3^\beta = 1$$

$$\vdots$$

$$\alpha = \log_2 \frac{1}{3}, \quad \beta = 1$$

Neka je T linearni operator na prostoru $\mathbb{R}^2$ koji vektor najprije rotira za ugao od $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru, a zatim reflektuje (zrcali) u odnosu na pravac $y=x$. Izračunati matricu operatora T (drugim riječima matricu koordinata od T) u bazi $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Odrediti koordinate tačke $T(v)$ u odnosu na ovu bazu, gdje je v proizvoljan element iz $\mathbb{R}^2$.

Rj. Prisjetimo se

Matrica koordinata (matrica operatora)

Neka su $\mathcal{B}=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ i $\mathcal{B}'=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matricu koordinata od $T\in\mathcal{L}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ je definisana kao $m\times n$ matrica

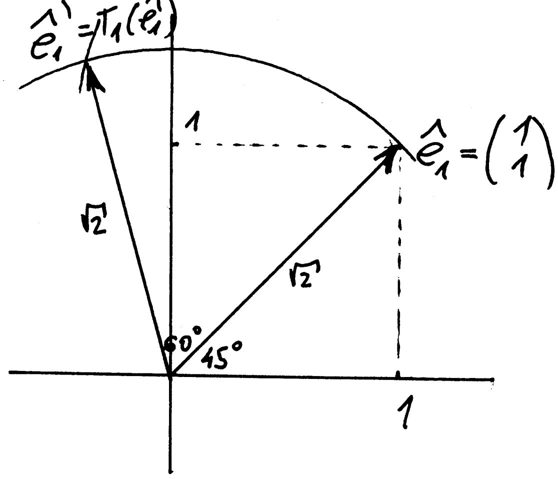
$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Kada je T linearni operator na $\mathcal{U}$, tada je u igri samo jedna baza, i koristimo $[T]_{\mathcal{B}}$ umjesto $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$.

Ako elemente baze $\mathcal{B}$ označimo sa $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ mi u stvari tražimo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T(\vec{e}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ [T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} & [T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo prvo rotaciju za $\frac{\pi}{3}$ oko koordinatnog početka u pozitivnom smjeru - i ovaj operator označimo sa T_1.

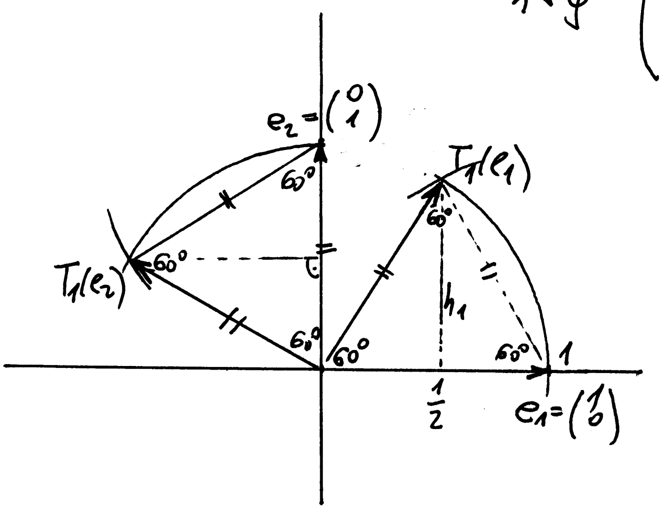


Primjetimo da je $T(\hat{e}_1)$ teško izračunati direktnim putem.

Da bi izračunali $T(\hat{e}_1)$ koristit ćemo standardnu bazu $\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ i sljedeću Teoremu:

Neka je $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ redom baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Tada za $\forall u \in \mathcal{U}$ imamo $[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}}$

$\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad [T_1]_\varphi = \begin{pmatrix} | & | \\ [T_1(e_1)]_\varphi & [T_1(e_2)]_\varphi \\ | & | \end{pmatrix}$



$h_1^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ $\qquad h_2^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

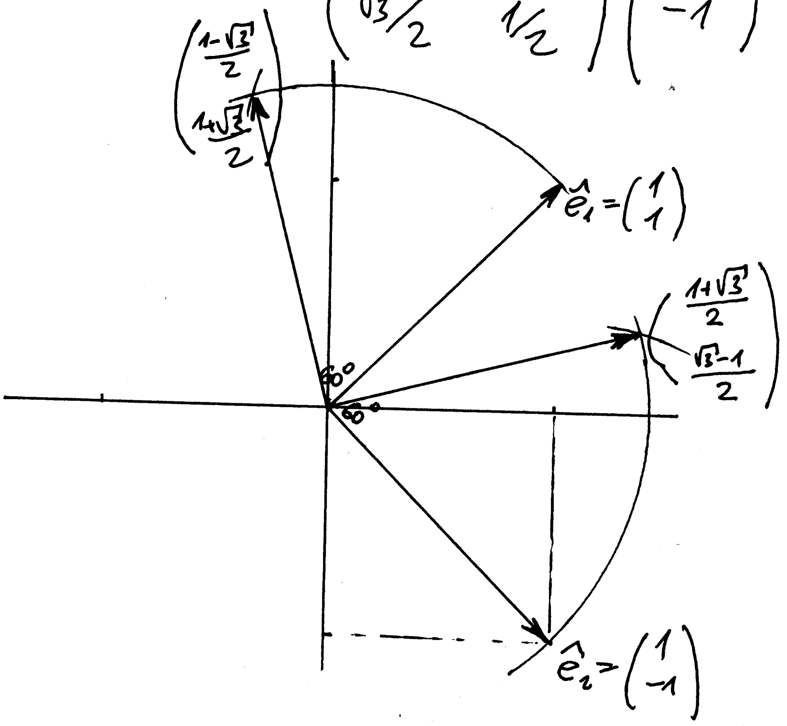
$$T_1(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = [T_1(e_1)]_\varphi$$

$$T_1(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix} = [T_1(e_2)]_\varphi$$

Prema tome $[T_1]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Sad imamo

$$[T_1(\hat{e}_1)]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[T(\hat{e}_2)\right]_\varphi = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$$



Dalje nije teško pokazati da se proizvoljan vektor $v \doteq \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ osnom simetrijom s osom u pravoj $y=x$ preslikava u vektor $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

Prema tome
$$T(\hat{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$T(\hat{e}_2) = T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Odredimo još koordinate od $T(\hat{e}_1)$ i $T(\hat{e}_2)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[T(\hat{e}_1)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha - \beta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$+$

$$2\alpha = \frac{1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\beta = \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})}{2}$$

$$2\beta = \sqrt{3}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\\ \alpha-\beta&=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ +\ \ &\\ \hline 2\alpha&=\frac{\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$2\alpha=\sqrt{3} \qquad \alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-:\quad 2\beta=\frac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{2}$$

$$2\beta=-1$$

$$\beta=-\frac{1}{2}$$

$$[T(\vec{e}_2)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ -1/2\end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

tražena matrica operatora

Neka je v proizvoljan vektor iz $\mathbb{R}^2$ npr. $v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

$$v=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\ldots=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha-\beta}{2}\end{pmatrix}$$

$$[T(v)]_{\mathcal{B}}=[T]_{\mathcal{B}}\cdot[v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \frac{\alpha-\beta}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ \alpha-\beta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\alpha+\beta+(\alpha-\beta)\sqrt{3}\\ (\alpha+\beta)\sqrt{3}-(\alpha-\beta)\end{pmatrix}$$

tražene koordinate vektora $T(v)$ u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

(#) U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2 = \{p(x) = ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ polinoma stepena manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim (unutrašnjim) proizvodom $\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ dat je podprostor

$$\mathcal{M} = \text{span}\{x^2-1,\ x+1\}$$

Odredite jednu bazu za $\mathcal{M}^\perp$, te nađite prikaz polinoma $p(x) = 2x^2+x+5$ u obliku sume $p = p_1+p_2$, pri čemu je $p_1 \in \mathcal{M}$, $p_2 \in \mathcal{M}^\perp$.

Rj. Prisjetimo se

<u>Ortogonalni komplement</u>
<u>Za podskup $\mathcal{M}$ unitarnog prostora V, ortogonalni komplement $\mathcal{M}^\perp$ od $\mathcal{M}$ je definisan sa</u>

$$\underline{\mathcal{M}^\perp = \{x \in V \mid \langle m,x \rangle = 0 \text{ za } \forall m \in \mathcal{M}\}}$$

Primjetimo da je $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$. Kako je

$\dim(\mathcal{M}) = 2$ i $\mathcal{P}_2 = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ to je $\dim(\mathcal{M}^\perp) = 1$.

Da bi odredili $\mathcal{M}^\perp$ dovoljno je pronaći polinom $p(x) = ax^2+bx+c$ takav da $\langle p,q \rangle = 0$ $\forall q \in \mathcal{M}$.

Zbog $\dim(\mathcal{M}^\perp) = 1$ dobijeni polinom će biti baza za $\mathcal{M}^\perp$.

Da bi odredili polinom $p(x) = ax^2+bx+c$ za koji vrijedi $\langle p,q \rangle = 0$ $\forall q \in \mathcal{M}$ najjednostavnije je posmatrati bazu za $\mathcal{M}$ tj. skup $\{x^2-1,\ x+1\}$.

$$\langle ax^2+bx+c,\ x^2-1\rangle = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)(x^2-1)\,dx = \int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3\underline{+cx^2-ax^2}-bx-c)\,dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^4+bx^3+(c-a)x^2-bx-c)\,dx=0$$

$$\frac{a}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}+\underbrace{\frac{b}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}}_{=0}+(c-a)\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}-\underbrace{\frac{b}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}}_{=0}-cx\Big|_{-1}^{1}=0$$

$$\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}(c-a)-2c=0$$

$$\frac{2}{5}a-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}c-2c=0 \implies \frac{6-10}{15}a+\frac{2-6}{3}c=0$$

$$-\frac{4}{15}a-\frac{4}{3}c=0 \quad \dots(*)$$

$$\langle ax^2+bx+c,\ x+1\rangle=0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)(x+1)\,dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^3+\underline{bx^2}+\underline{\underline{cx}}+\underline{ax^2}+\underline{\underline{bx}}+c)\,dx=0$$

$$\int_{-1}^{1}(ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c)\,dx=0$$

$$\underbrace{\frac{a}{4}x^4\Big|_{-1}^{1}}_{=0}+\frac{b+a}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}+\underbrace{\frac{c+b}{2}x^2\Big|_{-1}^{1}}_{=0}+cx\Big|_{-1}^{1}=0$$

$$\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}a+2c=0 \implies \frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b+2c=0 \quad \dots(**)$$

Iz $(*)$ i $(**)$ vidimo da imamo sustem od dvije jednadžine su tri nepoznate. Jednu nepoznatu uzimamo proizvoljno npr.

$a = 15t, \ t \in \mathbb{R}$

$(*) \Rightarrow \quad -\frac{4}{15} \cdot 15t - \frac{4}{3}c = 0$

$-4t - \frac{4}{3}c = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}c = -4t \quad \Rightarrow \quad c = -3t, \ t \in \mathbb{R}$

$(**) \Rightarrow \quad \frac{2}{3} \cdot 15t + \frac{2}{3}b + 2 \cdot (-3)t = 0$

$10t + \frac{2}{3}b - 6t = 0$

$\frac{2}{3}b = -4t \ / \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 2b = -12t \quad \Rightarrow \quad b = -6t$

Sad $ax^2 + bx + c$ postaje (za $t=1$) $\quad 15x^2 - 6x - 3 \quad / : 15$

$$x^2 - \frac{6}{15}x - \frac{3}{15}$$

Odavde vidimo da je $\quad M^{\perp} = \text{span}\left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{baza za } M^{\perp}}}{x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}} \right\}$

Ostalo je još da pronađemo skalare α, β i γ tako da

$$2x^2 + x + 5 = \alpha(x^2 - 1) + \beta(x + 1) + \gamma\left(x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\right)$$

$$\begin{aligned} \alpha \quad\quad + \gamma &= 2 \quad \ldots(1) \\ \beta - \frac{2}{5}\gamma &= 1 \quad \ldots(2) \\ -\alpha + \beta - \frac{1}{5}\gamma &= 5 \quad \ldots(3) \end{aligned}$$

$(1)+(3): \quad \beta + \frac{4}{5}\gamma = 7 \quad (\mathrm{I})$

$(2): \quad \beta - \frac{2}{5}\gamma = 1 \quad (\mathrm{II})$

$(\mathrm{I})-(\mathrm{II}): \quad \frac{6}{5}\gamma = 6 \ / \cdot 5$

$6\gamma = 30 \Rightarrow \gamma = 5$

$\gamma = 5 \Rightarrow \quad \beta = 7 - 4$

$\beta = 3 \quad \Rightarrow \alpha = -3$

Prema tome

$$2x^2 + x + 5 = \underbrace{(-3)(x^2 - 1) + 3(x + 1)}_{\in M} + \underbrace{5\left(x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\right)}_{\in M^{\perp}}$$

Zadana je linearni transformacija $T: \mathcal{P}_2 \longrightarrow Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(-1) \\ p(1) & p(2) \end{pmatrix}.$$

Prikažite transformaciju T u paru standardnih baza (drugim riječima odredite matricu koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ u odnosu na par $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, gdje su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$, redom, standardne baze za $\mathcal{P}_2$ i $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$), te mu odrediti po jednu bazu za jezgru i sliku. Da li postoji polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(q) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? ($\mathcal{P}_2$ je prostor polinoma stepena ≤ 2).

Rj. Prisjetimo se

Matrica koordinata

Neka su $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, redom, baze za $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Matrica koordinata od $T \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ u odnosu na par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ je definisana kao $m \times n$ matrica

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(u_1)]_{\mathcal{B}'} & [T(u_2)]_{\mathcal{B}'} & \dots & [T(u_n)]_{\mathcal{B}'} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Standardna baza za $\mathcal{P}_2$ je $\mathcal{S} = \{1, x, x^2\}$

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Standardna baza za $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ je $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{S}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow [T(x^2)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Prema tome

$$[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sljedeće što želimo je odrediti bazu za jezgru i sliku od T.

$$\ker(T) = \{ g \in \mathcal{P}_2 \mid T(g) = 0 \}$$

$$\operatorname{im}(T) = \{ T(p) \mid p \in \mathcal{P}_2 \}$$

Prisjetimo se

<u>Djelovanje operatora kao množenje matricom</u>

<u>Neka je $T \in \mathcal{L}(U, V)$, i neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$, redom, dvije baze za U i V. Tada</u>

$$\underline{[T(u)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [u]_{\mathcal{B}}}$$

Neka je g proizvoljan polinom iz $\mathcal{P}_2$, $g(x) = a + bx + cx^2$

$$[g]_{\varphi} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Sad možemo pisati

$$\ker(T) = \{ [g]_{\varphi} \mid [T(g)]_{\varphi'} = \mathbf{0} \} = \{ [g]_{\varphi} \mid [T]_{\varphi\varphi'} [g]_{\varphi} = \mathbf{0} \}$$

Prema tome $\ker(T) = \ker([T]_{\varphi\varphi'}) = \ker\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix}\right)$.

$$[T]_{\varphi\varphi'} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix} \underset{\substack{III_v - I_v \\ IV_v - I_v}}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&1\\0&2&4\end{pmatrix} \underset{IV_v + II_v\cdot(2)}{\overset{III_v + II_v}{\sim}} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&2\\0&0&6\end{pmatrix} \overset{IV_v + III_v\cdot(-3)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix} \overset{III_v : 2}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \overset{II_v\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \overset{III_v + II_v}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a = 0,\ b = 0,\ c = 0$

$\Rightarrow \ker(T) = \text{span}\{0\}$

$\text{im}(T) = \left\{ [T(p)]_{\varphi'} \mid [p]_\varphi \right\} = \left\{ [T]_{\varphi\varphi'} [p]_\varphi \mid [p]_\varphi \right\}$
$= \text{im}([T]_{\varphi\varphi'})$

Osnovne kolone u $[T]_{\varphi\varphi'}$ formiraju bazu za $\text{im}([T]_{\varphi\varphi'})$

$\Rightarrow \text{im}(T) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} \right\}$.

Odredimo još polinom $g \in \mathcal{P}_2$ tako da $T(g) = \begin{pmatrix}2&1\\5&4\end{pmatrix}$.

$$[T(g)]_{\varphi'} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\\4\end{pmatrix} = [T]_{\varphi\varphi'} \cdot [g]_\varphi = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a \qquad\quad &= 2 \\ a - b + c &= 1 \\ a + b + c &= 5 \\ a + 2b + 4c &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -b + c &= -1 \\ b + c &= 3 \\ 2b + 4c &= 2 \end{aligned}$$

sistem nema rješenje

Ne postoji polinom $g \in \mathcal{P}_2$ takav da je $T(g) = \begin{bmatrix}2&1\\5&4\end{bmatrix}$.